



**HAL**  
open science

# PARAMÉTRISATIONS CONFORMÉMENT COVARIANTES POUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTES RELATIVISTES

Erwann Delay

► **To cite this version:**

Erwann Delay. PARAMÉTRISATIONS CONFORMÉMENT COVARIANTES POUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTES RELATIVISTES. 2016. hal-01258382v1

**HAL Id: hal-01258382**

**<https://univ-avignon.hal.science/hal-01258382v1>**

Preprint submitted on 18 Jan 2016 (v1), last revised 2 Jun 2016 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# PARAMÉTRISATIONS CONFORMÉMENT COVARIANTES POUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTES RELATIVISTES

ERWANN DELAY

RÉSUMÉ. Nous modifions la méthode de Lichnerowicz-York afin d'obtenir des systèmes elliptiques conformément covariants. Ce type de paramétrage est certainement plus naturel pour des données initiales à courbure moyenne non constante.

ABSTRACT. We modify the Lichnerowicz-York method in order to obtain conformally covariant systems. This type of parametrization is certainly more natural for non constant mean curvature initial data.

**Mots clefs** : Géométrie riemannienne conforme, système d'EDP elliptique non linéaire, Laplacien vectoriel, relativité générale, équations de contraintes.

**2010 MSC** : 53C21, 53A45, 53A30, 58J05, 35J61.

## 1. INTRODUCTION

Sur une variété lisse  $M$  de dimension  $n$ , pour une métrique riemannienne  $g$ , nous noterons  $R(g)$  sa courbure scalaire et  $\nabla$  sa connexion de Levi-Civita. Si  $h$  est un champ de deux tenseurs covariants symétriques, on définit sa divergence comme étant la 1-forme donnée par

$$(\operatorname{div}_g h)_i = -\nabla^k h_{ki}.$$

Les équations de contraintes du vide de la relativité générale consistent à chercher une métrique riemannienne  $\widehat{g}$ , et un champ de tenseur symétrique  $\widehat{K}$ , tels que

$$(C) \begin{cases} R(\widehat{g}) - |\widehat{K}|_{\widehat{g}}^2 + (\operatorname{Tr}_{\widehat{g}} \widehat{K})^2 = 0 \\ \operatorname{div}_{\widehat{g}} \widehat{K} + d(\operatorname{Tr}_{\widehat{g}} \widehat{K}) = 0 \end{cases}$$

Ce système est hautement sous-déterminé puisqu'il comporte  $(n + 1)$  équations pour  $n(n + 1)$  inconnues. Il est naturel de fixer une partie de ces inconnues et de chercher les  $(n + 1)$  restantes.

La paramétrisation conforme habituelle, qui fait apparaître l'équation de Lichnerowicz de 1944 [2], ainsi que la décomposition de York de 1973 [6], a été beaucoup étudiée depuis par de nombreux auteurs, sur des variétés compactes ou non compactes (asymptotiques à des modèles : euclidiens, hyperboliques, cylindriques,...). La liste des travaux étant trop conséquente pour la donner ici, nous renvoyons par exemple à l'article récent [5] et ses références pour un aperçu. Rappelons simplement qu'après les travaux réalisés à courbure moyenne  $\tau$  constante, comme [1] par exemple, plusieurs tentatives sont réalisées pour traiter des cas où cette dernière est variable.

La méthode consiste à se fixer une métrique  $g$ , un 2-tenseur symétrique  $\sigma$  de trace nulle et à divergence nulle (dit TT-tenseur), ainsi qu'une fonction  $\tau$ . On cherche alors des solutions des équations de contraintes du vide sous la forme

$$\hat{g} = \phi^{N-2}g, \quad \hat{K} = \frac{\tau}{n}\hat{g} + \phi^{-2}(\sigma + \mathring{\mathcal{L}}_g W), \quad (P)$$

où  $N = \frac{2n}{n-2}$ , d'inconnues  $\phi > 0$  ainsi qu'un champ vectoriel  $W$  et où

$$(\mathring{\mathcal{L}}_g W)_{ij} = \nabla_i W_j + \nabla_j W_i - \frac{2}{n} \nabla^k W_k g_{ij}.$$

Si l'on pose

$$w = |\sigma + \mathring{\mathcal{L}}_g W|_g,$$

cela correspond à résoudre le système couplé

$$(S) \begin{cases} P_{g,w}\phi := \frac{4(n-1)}{n-2} \nabla^* \nabla \phi + R_g \phi - w^2 \phi^{-N-1} = \frac{1-n}{n} \tau^2 \phi^{N-1} & (L) \\ \operatorname{div}_g \mathring{\mathcal{L}}_g W = \frac{1-n}{n} \phi^N d\tau & (V) \end{cases}$$

L'équation de Lichnerowicz (L) a des propriétés de covariance conforme (voir la section 9.3 pour une définition précise). En effet si  $\varphi$  est une fonction positive et que l'on pose

$$\tilde{g} = \varphi^{N-2}g, \quad \tilde{w} = \varphi^{-N}w, \quad \tilde{\phi} = \varphi^{-1}\phi$$

alors

$$P_{\tilde{g},\tilde{w}}\tilde{\phi} = \varphi^{1-N}P_{g,w}\phi = \frac{1-n}{n}\tau^2\tilde{\phi}^{N-1}.$$

En revanche l'équation vectorielle (V) ne possède pas une telle propriété. De même que la transformation conforme de  $w$  utilisée ci-dessus sur (L) ne correspond pas à une transformation naturelle de  $\sigma$  et  $W$ .

Notons tout de même que certains opérateurs apparaissant dans (V) sont eux conformément covariants :

$$\operatorname{div}_{\tilde{g}} h = \varphi^{-N} \operatorname{div}_g(\varphi^2 h), \quad \mathring{\mathcal{L}}_{\tilde{g}} X = \varphi^{N-2} \mathring{\mathcal{L}}_g(\varphi^{2-N} X), \quad (C)$$

bien que le Laplacien vectoriel  $\operatorname{div} \circ \mathring{\mathcal{L}}$  ne le soit pas.

Rappelons enfin la décomposition de York [6] valable par exemple si  $M$  est compacte et si  $g$  n'a pas de Killing conformes (ie.  $\ker \mathring{\mathcal{L}}_g$  est

trivial). Tout champ de tenseurs covariants symétriques  $h$  de trace nulle se scinde alors de façon unique en

$$h = \sigma + \mathcal{L}_g W, \quad (Y)$$

où  $\sigma$  est un TT-tenseur et  $W$  un champ de vecteur (systématiquement identifié à sa 1-forme duale correspondante).

Nous proposons dans la section 2 une paramétrisation découlant de la décomposition de York relative à  $\widehat{g}$  et non à celle associée à  $g$ . Cette paramétrisation donne lieu à un système conformément covariant.

Ce dernier fait alors apparaître un Laplacien vectoriel auto-adjoint pour une mesure pondérée, nous l'étudions en section 3.

Dans la section 4 nous testons d'autres paramétrages possibles et les comparons.

Nous donnons ensuite une équation limite du type de [3] adaptée au nouveau système (voir section 5).

Dans la section 6 une version linéaire du système obtenu est calculée. Cette dernière suggère d'étudier éventuellement un autre système, il est posé en section 7 et aboutit enfin à un dernier paramétrage qui semble le plus naturel.

Enfin, en section 8, nous mettons en avant quelques commentaires pour la suite évidente de ce travail.

## 2. UNE PARAMÉTRISATION CONFORMÉMENT COVARIANTE

Revenons sur  $(C)$  et utilisons la décomposition de York, relative à  $\widehat{g}$ ,

$$\widehat{K} - \frac{\tau}{n}\widehat{g} = \widehat{\sigma} + \mathcal{L}_{\widehat{g}}\widehat{W}.$$

Ainsi  $(C)$  équivaut à

$$(C') \begin{cases} R(\widehat{g}) - |\widehat{\sigma} + \mathcal{L}_{\widehat{g}}\widehat{W}|_{\widehat{g}}^2 = \frac{1-n}{n}\tau^2 \\ \operatorname{div}_{\widehat{g}}\mathcal{L}_{\widehat{g}}\widehat{W} = \frac{1-n}{n}d\tau \\ \operatorname{div}_{\widehat{g}}\widehat{\sigma} = 0 \end{cases}$$

Si l'on cherche une solution dans une classe conforme  $\widehat{g} = \phi^{N-2}g$ , compte tenu de  $(C)$ , il est naturel de poser  $\widehat{\sigma} = \phi^{-2}\sigma$ , où  $\sigma$  est un TT-tenseur. La troisième équation est ainsi automatiquement satisfaite. Mais toujours en considérant  $(C)$ , si l'on traduit la deuxième équation en termes de  $g$ , il vient spontanément  $\widehat{W} := \phi^{N-2}W$ .

Ainsi, toujours avec les mêmes  $g, \sigma, \tau$  fixés, on peut paramétrer plutôt les solutions des contraintes  $(C)$  sous la forme

$$(P') \begin{cases} \widehat{g} = \phi^{N-2}g, \\ \widehat{K} = \frac{\tau}{n}\widehat{g} + \phi^{-2}(\sigma + \phi^N \mathcal{L}_g W) \end{cases}$$

Avec ce paramétrage dans (C), si l'on pose

$$\omega = \omega(\sigma, \phi, W, g) := |\sigma + \phi^N \mathring{\mathcal{L}}_g W|_g,$$

on obtient le nouveau système

$$(S') \begin{cases} P_{g,\omega}\phi = \frac{1-n}{n}\tau^2\phi^{N-1} & (L') \\ \Delta_{g,\phi}W := \phi^{-N}\operatorname{div}_g(\phi^N \mathring{\mathcal{L}}_g W) = \frac{1-n}{n}d\tau & (V') \end{cases}$$

On effectue maintenant les changements conformes :

$$\tilde{g} = \varphi^{N-2}g, \quad \tilde{\phi} = \varphi^{-1}\phi, \quad \tilde{\sigma} = \varphi^{-2}\sigma, \quad \tilde{W} = \varphi^{N-2}W.$$

Notez que par (C), le tenseur  $\tilde{\sigma}$  est bien TT pour  $\tilde{g}$ . On a aussi cette fois

$$\tilde{\omega} := \omega(\tilde{\sigma}, \tilde{\phi}, \tilde{W}, \tilde{g}) = \varphi^{-N}\omega$$

donc l'équation scalaire (L') se comporte comme précédemment. Pour la nouvelle équation vectorielle (V'), comme par (C),

$$\Delta_{\tilde{g},\tilde{\phi}}\tilde{W} = \Delta_{g,\phi}W,$$

elle devient ainsi conformément covariante.

REMARQUES :

- Si  $\varphi = \phi$  on retrouve bien  $\Delta_{g,\phi}W = \Delta_{\hat{g},1}\widehat{W}$ .

- Considérons l'opérateur donné par

$$\mathcal{P}_g \begin{pmatrix} \phi \\ W \\ \sigma \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \phi^{1-N}P_{g,\omega}\phi \\ \Delta_{g,\phi}W \\ \phi^{-N}\operatorname{div}_g\sigma \end{pmatrix},$$

de telle sorte que  $\mathcal{P}_g$  est covariant conforme :

$$\mathcal{P}_{\tilde{g}} \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{W} \\ \tilde{\sigma} \end{pmatrix} = \mathcal{P}_g \begin{pmatrix} \phi \\ W \\ \sigma \end{pmatrix}.$$

Le système (S') (modulo ajout de la troisième équation) s'écrit dans ce cas simplement

$$\mathcal{P}_g \begin{pmatrix} \phi \\ W \\ \sigma \end{pmatrix} = \frac{1-n}{n} \begin{pmatrix} \tau^2 \\ d\tau \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Il y a eu d'autres tentatives de modification de la méthode de Lichnerowicz-York comme la méthode dite de "Conformal Thin-Sandwich" (voir par exemple [5] qui les compare). Notamment il existe déjà des paramétrages où

$$\widehat{K} = \frac{\tau}{n}\widehat{g} + \phi^{-2}(\sigma + f\mathring{\mathcal{L}}_g W)$$

mais la fonction  $f$  semble toujours avoir été fixée au départ et non comme une fonction de  $\phi$ , or  $f = \phi^N$  est la plus simple qui rend le système conformément covariant (voir les sections 4 et 7 pour d'autres

possibilités).

- Plus généralement, pour tout opérateur différentiel linéaire d'ordre  $k$  covariant conforme, on peut intercaler une fonction paramètre entre lui et son adjoint formel afin d'obtenir un opérateur d'ordre  $2k$ , covariant conforme, positif et autoadjoint pour une mesure pondérée.

### 3. L'ÉQUATION VECTORIELLE

Considérons le Laplacien vectoriel, de type Witten, obtenu précédemment :

$$\Delta_{g,\phi}W = \phi^{-N} \operatorname{div}_g \phi^N \mathring{\mathcal{L}}_g W = \operatorname{div}_g \mathring{\mathcal{L}}_g W - N \mathring{\mathcal{L}}_g W (\nabla \ln \phi, \cdot).$$

Nous choisirons ici de travailler sur une variété compacte. Comme  $2 \operatorname{div}_g$  est l'adjoint formel  $L^2(d\mu_g)$  de  $\mathring{\mathcal{L}}_g$ , on a

$$\int_M \langle \Delta_{g,\phi}W, V \rangle_g \phi^N d\mu_g = \frac{1}{2} \int_M \langle \mathring{\mathcal{L}}_g W, \mathring{\mathcal{L}}_g V \rangle_g \phi^N d\mu_g$$

Ce Laplacien est donc  $L^2(\phi^N d\mu_g)$  auto-adjoint et son noyau est réduit aux 1-formes de Killing conforme.

On cherche à résoudre (avec pour simplifier  $g, \phi, \tau$  lisses, on pourrait aussi prendre  $\phi \in L^\infty$ ),

$$\Delta_{g,\phi}W = \frac{1-n}{n} d\tau. \quad (V')$$

Par l'alternative de Fredholm, une condition nécessaire et suffisante à l'existence est l'orthogonalité au noyau :

$$\int_M \langle X, d\tau \rangle_g \phi^N d\mu_g = 0, \quad (\perp)$$

pour tout  $X$  dans  $\ker \mathring{\mathcal{L}}_g$ . L'unicité ayant lieu à l'addition d'un élément de  $\ker \mathring{\mathcal{L}}_g$  près. Remarquons que si  $\tilde{X} = \varphi^{N-2} X$ ,

$$\langle \tilde{X}, Y \rangle_{\tilde{g}} \tilde{\phi}^N d\mu_{\tilde{g}} = \langle X, Y \rangle_g \phi^N d\mu_g,$$

ainsi par (C), la condition  $(\perp)$  est bien covariante conforme. Elle peut s'écrire

$$\int_M \tau d_g^*(\phi^N X) d\mu_g = 0. \quad (\perp^*)$$

Bien entendu si  $g$  ne possède pas de champ de Killing conforme, l'équation  $(V')$  possède toujours une unique solution et ce pour toutes fonctions (positives)  $\phi$ .

Si  $\mathcal{K} = \ker \mathring{\mathcal{L}}$  est non trivial, on peut poser  $\Pi_{g,\phi}$  comme la projection orthogonale sur  $\mathcal{K}$  pour le produit scalaire pondéré :

$$(X, Y)_{g,\phi} = \int_M \langle X, Y \rangle_g \phi^N d\mu_g.$$

On peut alors résoudre

$$\Delta_{g,\phi}W = \frac{1-n}{n}(Id - \Pi_{g,\phi})d\tau, \quad (V'_\Pi)$$

$W$  étant unique si on le prend orthogonal à  $\mathcal{K}$  (pour le produit scalaire pondéré).

REMARQUE : Par analogie avec le Laplacien de Witten on pourrait aussi considérer le Laplacien similaire  $\phi^{-\frac{N}{2}} \operatorname{div}(\phi^{\frac{N}{2}} \phi^{\frac{N}{2}} \mathring{\mathcal{L}}\phi^{-\frac{N}{2}})$ .

#### 4. AUTRES PARAMÉTRAGES ET CORRESPONDANCE

Considérons une autre métrique conforme  $\tilde{g} = \varphi^{N-2}g$ . La décomposition de York ( $Y$ ), associée à  $\tilde{g}$ , du tenseur

$$\phi^2\varphi^{-2}(\widehat{K} - \frac{\tau}{n}\widehat{g}),$$

aboutit au paramétrage

$$(P_\varphi) \begin{cases} \widehat{g} = \phi^{N-2}g, \\ \widehat{K} = \frac{\tau}{n}\widehat{g} + \phi^{-2}(\sigma + \varphi^N \mathring{\mathcal{L}}_g W). \end{cases}$$

Avec ce paramétrage dans ( $C$ ), si l'on pose

$$\omega_\varphi = \omega(\sigma, \varphi, W, g) := |\sigma + \varphi^N \mathring{\mathcal{L}}_g W|_g,$$

on obtient le nouveau système

$$(S_\varphi) \begin{cases} P_{g,\omega_\varphi}\phi = \frac{1-n}{n}\tau^2\phi^{N-1} & (L_\varphi) \\ \phi^{-N} \operatorname{div}_g(\varphi^N \mathring{\mathcal{L}}_g W) = \frac{1-n}{n}d\tau & (V_\varphi) \end{cases}$$

Si  $g$  n'a pas de champ de Killing conforme, par ( $Y$ ), pour tout  $W$  et toutes fonctions  $\varphi$ , il existe un champ  $V$  et un TT-tenseur  $\sigma'$  uniques vérifiant

$$\sigma' + \mathring{\mathcal{L}}_g V = \varphi^N \mathring{\mathcal{L}}_g W.$$

Il en découle que les solutions de tous les systèmes  $(S_\varphi)$  sont en correspondance, mais pour des  $\sigma$  différents.

REMARQUE : On peut prendre  $\varphi$  dépendant de  $\phi$  et éventuellement d'autres paramètres dans le système, alors abusivement noté  $(P_\varphi)$ . Par exemple  $\varphi^N = \phi^N F^2(|\mathring{\mathcal{L}}W|_g)$ , pour une fonction  $F$ , donnera encore un système covariant conforme d'ordre de dérivation 2. Le paramétrage  $\varphi^N = |\tau|\phi^N$  semble aussi donner un système intéressant.

#### 5. EQUATION LIMITE

Récemment, dans [3] une équation limite<sup>1</sup> est introduite pour le système ( $S$ ). Cette équation a la propriété impressionnante de garantir

---

1. en fait une famille d'équations limite

l'existence de solutions à  $(S)$ , si elle même a zéro pour unique solution. Si l'on cherche formellement une équation limite pour  $(S')$  on obtient

$$\operatorname{div} \left( \frac{|\mathring{\mathcal{L}}W|}{|\tau|} \mathring{\mathcal{L}}W \right) = \frac{1-n}{n} \frac{|\mathring{\mathcal{L}}W|}{|\tau|} d\tau. \quad (\mathcal{L})$$

Elle implique immédiatement

$$d \left[ \frac{|\tau|}{|\mathring{\mathcal{L}}W|} \operatorname{div} \left( \frac{|\mathring{\mathcal{L}}W|}{|\tau|} \mathring{\mathcal{L}}W \right) \right] = 0.$$

En l'absence de Killing conformes, l'intégration de  $(\mathcal{L})$  contre  $W$ , assure pour les solutions,

$$W = 0 \iff d_g^* \left( \frac{|\mathring{\mathcal{L}}W|}{|\tau|} W \right) = 0.$$

Le calcul rigoureux de l'équation limite de  $(S')$ , ainsi qu'une étude plus approfondie sera développée ultérieurement. En appendice, quelques reformulations de  $(L)$  sont indiquées à cet effet.

REMARQUE :

Si  $(\tau, W)$  vérifie l'équation  $(\mathcal{L})$  et si  $\lambda$  est un réel non nul, alors  $(\lambda\tau, \lambda W)$  vérifie aussi  $(\mathcal{L})$ . De plus  $(\tau, \lambda W)$  vérifie alors  $(\mathcal{L}_\lambda)$  qui par définition est  $(\mathcal{L})$  où la constante  $\frac{1-n}{n}$  a été multipliée par  $\lambda$ , ainsi l'existence ou non de solutions non triviales de  $(\mathcal{L}_\lambda)$  ne dépend pas de  $\lambda$ .

## 6. UNE VERSION LINÉAIRE

Dans le but de mieux appréhender l'étude future de  $(S')$ , nous allons ici linéariser l'opérateur  $\mathcal{P}_g$  introduit en section 2. Notons  $(\psi, V, h)$  des variations de  $(\phi, W, \sigma)$ ,  $v$  la variation de  $\tau$ , on garde ici la métrique  $g$  fixée. Compte tenu de la covariance conforme de  $\mathcal{P}_g$ , le calcul du linéarisé peut se faire en  $\phi = 1$ . On trouve alors

$$D\mathcal{P}_g^{(1,W,\sigma)} \begin{pmatrix} \psi \\ V \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{g,\sigma,W} & -2\langle \mathring{K}, \mathring{\mathcal{L}} \cdot \rangle & -2\langle \mathring{K}, \cdot \rangle \\ -N\mathring{\mathcal{L}}_g W(\nabla_{g,\cdot,\cdot}) & \operatorname{div}_g \mathring{\mathcal{L}}_g & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{div}_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ V \\ h \end{pmatrix}$$

où

$$\mathring{K} = \sigma + \mathring{\mathcal{L}}_g W,$$

et

$$\begin{aligned} P_{g,\sigma,W} &= \frac{4}{n-2} \left( (n-1)\nabla^*\nabla - R_g + n|\sigma|^2 + n\langle \sigma, \mathring{\mathcal{L}}_g W \rangle \right) \\ &= \frac{4}{n-2} \left( (n-1)\nabla^*\nabla - R_g + \frac{n}{2} \left( |\sigma|^2 + |\mathring{K}|^2 - |\mathring{\mathcal{L}}_g W|^2 \right) \right). \end{aligned}$$



Ce dernier opérateur, évalué en une solution de  $(S')$ , peut se réécrire avec le laplacien de Yamabe, car

$$R_g = |\mathring{K}|^2 + \frac{1-n}{n}\tau^2.$$

La version linéaire du système est ainsi

$$D\mathcal{P}_g^{(1,W,\sigma)} \begin{pmatrix} \psi \\ V \\ h \end{pmatrix} = \frac{1-n}{n} \begin{pmatrix} 2\tau v \\ dv \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\sigma$  est fixée, cela impose  $h = 0$ , sinon, la forme du système global suggère de s'intéresser à d'autres possibilités.

## 7. AUTRE PARAMÉTRISATION COVARIANTE CONFORME

Dans la paramétrisation de la section 2, on a choisit un  $TT$ -tenseur  $\sigma$  fixé et posé  $\hat{\sigma} = \phi^{-2}\sigma$  afin de vérifier immédiatement la dernière équation du système  $(C')$ . Sans choisir cette solution particulière,  $(C')$  possède  $2n+1$  équations. Fixons plutôt un tenseur  $\hat{\sigma}$  de trace nulle et cherchons l'unique TT-tenseur pour  $\hat{g}$ ,  $\hat{\sigma}$  tel que

$$\phi^{-2}\hat{\sigma} = \hat{\sigma} - \mathring{\mathcal{L}}_{\hat{g}}\hat{Y}.$$

Il convient alors de poser

$$\hat{\sigma} = \phi^{-2}(\hat{\sigma} + \phi^N \mathring{\mathcal{L}}_g Y), \quad \varpi = |\hat{\sigma} + \phi^N \mathring{\mathcal{L}}_g Y + \phi^N \mathring{\mathcal{L}}_g W|$$

On aboutit ainsi au système covariant conforme

$$(S'') \begin{cases} \phi^{1-N} P_{g,\varpi} \phi = \frac{1-n}{n} \tau^2 & (L'') \\ \Delta_{g,\phi} W = \frac{1-n}{n} d\tau & (V_1'') \\ \Delta_{g,\phi} Y = -\phi^{-N} \operatorname{div}_g \hat{\sigma}. & (V_2'') \end{cases}$$

L'opérateur linéaire correspondant aura la forme :

$$\begin{pmatrix} \phi^{1-N} P_{g,\varpi} \phi \\ \Delta_{g,\phi} \\ \Delta_{g,\phi} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} P_{g,\hat{\sigma},W,Y} & -2\langle \mathring{K}, \mathring{\mathcal{L}} \cdot \rangle, & -2\langle \mathring{K}, \mathring{\mathcal{L}} \cdot \rangle \\ -N \mathring{\mathcal{L}}_g W(\nabla_{g,\cdot}, \cdot) & \Delta_{g,1} & 0 \\ -N \mathring{\mathcal{L}}_g Y(\nabla_{g,\cdot}, \cdot) & 0 & \Delta_{g,1} \end{pmatrix}$$

où

$$\mathring{K} = \hat{\sigma} + \mathring{\mathcal{L}}_g Y + \mathring{\mathcal{L}}_g W,$$

et

$$\begin{aligned} P_{g,\hat{\sigma},W,Y} &= \frac{4}{n-2} \left( (n-1) \nabla^* \nabla - R_g + n |\hat{\sigma}|^2 + n \langle \hat{\sigma}, \mathring{J}_g(W+Y) \rangle \right) \\ &= \frac{4}{n-2} \left( (n-1) \nabla^* \nabla - R_g + \frac{n}{2} \left( |\hat{\sigma}|^2 + |\mathring{K}|^2 - |\mathring{\mathcal{L}}_g(W+Y)|^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Cet opérateur, évalué en une solution de  $(S'')$ , peut encore se réécrire avec le laplacien de Yamabe, puisque qu'alors

$$R_g = |\mathring{K}|^2 + \frac{1-n}{n}\tau^2.$$

Un retour sur ce dernier système, prouve que seul  $X = Y + W$  est important et que le système naturel à résoudre semble donc être

$$(S''') \begin{cases} \phi^{1-N} P_{g,\varpi} \phi = \frac{1-n}{n} \tau^2 & (L''') \\ \Delta_{g,\phi} X = \frac{1-n}{n} d\tau - \phi^{-N} \operatorname{div}_g \mathring{\sigma} & (V''') \end{cases}$$

dans lequel la fonction  $\tau$ , ainsi que le tenseur symétrique  $\mathring{\sigma}$  de trace nulle, sont donnés. La paramétrisation pour les solutions de (C) étant alors

$$\widehat{g} = \varphi^{N-2} g, \quad \widehat{K} = \phi^{-2} (\mathring{\sigma} + \phi^N \mathring{\mathcal{L}}_g X) \quad (P''')$$

REMARQUES :

- On retrouve le système ( $S'$ ) si on choisit  $\mathring{\sigma}$  à divergence nulle.
- L'équation limite est la même que celle de ( $S'$ )

## 8. COMMENTAIRES ET PERSPECTIVES

Nous apportons ici quelques commentaires, ainsi que les prémices d'une étude de systèmes conformément covariants et qui fera naturellement l'objet de prochaines investigations, à commencer par certaines variétés compactes.

- AUTRES DÉCOMPOSITIONS DE YORK : Conformément covariants ou non, d'autres choix de  $\varphi = \varphi(\phi, W, \sigma, \tau, t, f, \dots)$  dans ( $S_\varphi$ ) pourraient être judicieux.
- CONTRAINTES AVEC SECOND MEMBRE : La paramétrisation convient aux équations de contraintes associées à certains tenseurs énergie impulsion non nul comme pour un champ scalaire.
- CORRESPONDANCE DES PARAMÉTRISATIONS : Compte tenu de la correspondance entre les différentes paramétrisations, les solutions de ( $S$ ) déjà existantes donnent des solutions de ( $S'$ ) par exemple, quitte à changer les paramètres. Si l'on considère l'ensemble des solutions de (C) comme une variété, il est probable que la méthode conforme donne une carte locale alors qu'une méthode conformément covariante correspondra à une carte plus globale, elle autorisera ainsi un plus large choix de  $(\tau, \sigma)$  (ou  $(\tau, \mathring{\sigma})$  pour ( $S''')$ ).
- ÉTUDE VARIATIONNELLE : Les systèmes obtenus ne sont plus triangulaires comme pour la méthode conforme classique. En revanche, une étude variationnelle semble particulièrement adaptée.
- POINT FIXE : Comme beaucoup d'études de ( $S$ ), une méthode classique pour résoudre un système comme ( $S'$ ) est de considérer une application  $T : E \rightarrow E$ , pour un espace approprié  $E$ , définie comme suit. S'il n'y a pas de Killing conforme, pour  $\psi$  dans  $E$ , on considère la solution

$W$  de  $(V')$  avec  $\phi$  remplacée par  $\psi$ . On définit alors  $\omega := \omega(\sigma, \psi, W, g)$  et on résout  $(L')$  (voir par exemple [4]), la solution définie ainsi  $T(\psi) := \phi$ . Il s'agit ensuite de trouver un point fixe  $\phi > 0$  de  $T$ . Si nécessaire, on pourra insérer des  $\phi$  bien combinés avec les  $\psi$  dans le choix de  $\omega$  (et/ou dans  $(L')$ ) et résoudre une autre équation scalaire, similaire à  $(L')$  sur  $\phi$ , par exemple linéaire en  $\phi$ . S'il y a des Killing conforme, on peut dans le processus, remplacer la résolution de  $(V')$  par celle de  $(V'_{\Pi})$ , si sous conditions, la projection disparaît à la limite .

• **ÉQUATION LIMITE** : L'équation  $(\mathcal{L})$  devra être étudiée. Certains critères géométriques permettent peut être de garantir la nullité de ces solutions. La meilleure constante dans une inégalité de type Korn (pour  $\mathring{\mathcal{L}}_g$ ), qui mesure la dissymétrie (conforme), devrait jouer un rôle.

## 9. APPENDICE

### 9.1. Laplacien vectoriel.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathring{\mathcal{L}} &= \nabla^* \nabla - \operatorname{Ric} + \frac{n-2}{2} dd^* \\ &= \Delta_{Hodge} - 2 \operatorname{Ric} + \frac{n-2}{2} dd^* \\ &= d^* d + \frac{n}{2} dd^* - 2 \operatorname{Ric} \end{aligned}$$

### 9.2. L'équation $(\mathcal{L})$ .

Nous donnons ici quelques réécritures de l'équation limite  $(\mathcal{L})$  avec  $f = \frac{1-n}{n} \tau$ .

- Si  $T = |f|^{-\frac{1}{2}} \mathring{\mathcal{L}}W$ , alors on peut écrire pour  $T \in \operatorname{Im} |f|^{-\frac{1}{2}} \mathring{\mathcal{L}}$ ,

$$\operatorname{div} (|T|T) = |T| |f|^{-\frac{1}{2}} df = 2|T| d(f^{-1} |f|^{\frac{3}{2}}).$$

- Comme  $(\mathcal{L})$  correspond à

$$\Delta_{g,\varphi} W = df \text{ avec } \varphi^N = \frac{|\mathring{\mathcal{L}}W|}{|\tau|} \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

On peut alors poser  $\tilde{g} = \varphi^{N-2} g$ ,  $\tilde{W} = \varphi^{N-2} W$ . On a donc

$$\operatorname{div}_{\tilde{g}} \mathring{\mathcal{L}}_{\tilde{g}} \tilde{W} = df.$$

- Il est possible aussi de reformuler  $(\mathcal{L})$  en

$$\operatorname{div} \mathring{\mathcal{L}}W - \mathring{\mathcal{L}}W (N \nabla_i \ln \phi, \cdot) = df,$$

avec

$$N \nabla_i \ln \phi = \nabla_i \ln |\mathring{\mathcal{L}}W| - \nabla_i \ln |f| = \frac{(\mathring{\mathcal{L}}W)^{jk} \nabla_i (\mathring{\mathcal{L}}W)_{jk}}{|\mathring{\mathcal{L}}W|^2} - \frac{\nabla_i f}{|f|}.$$

- L'équation  $(\mathcal{L})$  peut encore prendre la forme

$$|\mathring{\mathcal{L}}W|^{-1} \operatorname{div} \left( |\mathring{\mathcal{L}}W| \mathring{\mathcal{L}}W \right) + |f| \operatorname{div} \left( |f|^{-1} \mathring{\mathcal{L}}W \right) = df + \operatorname{div} \left( \mathring{\mathcal{L}}W \right).$$

**9.3. Covariance conforme.** Considérons trois produits de fibrés tensoriels sur  $M$ ,

$$E = E_1 \times \dots \times E_k, \quad F = F_1 \times \dots \times F_l, \quad G = G_1 \times \dots \times G_m,$$

ainsi qu'un opérateur différentiel agissant sur les sections :

$$P_g : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F),$$

et dont les coefficients sont déterminés par  $g = (g_1, \dots, g_m) \in G$ . On dira que  $P_g$  est conformément covariant si il existe  $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ ,  $b = (b_1, \dots, b_l) \in \mathbb{R}^l$  et  $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$  tels que pour toute section lisse  $e$  de  $E$ , et toute fonction  $\varphi$  lisse de  $M$ , on a

$$\varphi^b \odot P_{\varphi^c \odot g}(\varphi^a \odot e) = P_g(e),$$

où l'on a posé par exemple

$$\varphi^a \odot e = (\varphi^{a_1} e_1, \dots, \varphi^{a_k} e_k).$$

Un système différentiel sera dit conformément covariant si on peut l'écrire sous la forme  $P_g(e) = f$ , pour un opérateur  $P_g$  covariant conforme.

#### RÉFÉRENCES

- [1] J. Isenberg, *Constant mean curvature solutions of the einstein constraint equations on closed manifolds*, Classical and Quantum Gravity **12** (1995), 2249–2273.
- [2] A. Lichnerowicz, *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des  $n$  corps*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **23** (1944), 37–63.
- [3] R. Gicquaud M. Dahl and E. Humbert, *A limit equation associated to the solvability of the vacuum einstein constraint equations by using the conformal method*, Duke Mathematical Journal **161** (2012), no. 14, 2669–2697.
- [4] D. Maxwell, *A class of solutions of the vacuum Einstein constraint equations with freely specified mean curvature*, Math. Res. Lett. **16** (2009), no. 4, 627–645.
- [5] ———, *The conformal method and the conformal thin-sandwich method are the same*, Classical and Quantum Gravity **31** (2015), no. 14.
- [6] J. W. York, *Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on riemannian manifolds and the initial value problem of general relativity*, Journal of Mathematical Physics **14** (1973), no. 4, 456–464.

ERWANN DELAY, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES D'AVIGNON (EA 2151),  
F-84018 AVIGNON, FRANCE

*E-mail address:* Erwann.Delay@univ-avignon.fr

*URL:* <http://www.univ-avignon.fr/fr/recherche/annuaire-chercheurs/membrestruc/personnel/delay-erwann-1.html>